SET-1

Series SSO

कोड नं.
Code No. **65/1/A**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **12** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **12** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **26** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।

(ii) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न–पत्र में **26** प्रश्न हैं ।

(iii) खण्ड अ के प्रश्न **1 – 6** तक अति लघु-उत्तर वाले प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **1** अंक निर्धारित है ।

(iv) खण्ड ब के प्रश्न **7 – 19** तक दीर्घ-उत्तर I प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **4** अंक निर्धारित हैं ।

(v) खण्ड स के प्रश्न **20 – 26** तक दीर्घ-उत्तर II प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **6** अंक निर्धारित हैं ।

(vi) उत्तर लिखना प्रारम्भ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखिए ।

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *Please check that this question paper contains* ***26*** *questions.*

(iii) *Questions* ***1 – 6*** *in Section A are very short-answer type questions carrying* ***1*** *mark each.*

(iv) *Questions* ***7 – 19*** *in Section B are long-answer I type questions carrying* ***4*** *marks each.*

(v) *Questions* ***20 – 26*** *in Section C are long-answer II type questions carrying* ***6*** *marks each.*

(vi) *Please write down the serial number of the question before attempting it.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न का 1 अंक है ।

Question numbers 1 to 6 carry 1 mark each.

1. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ हो, तो किसी प्राकृत संख्या n के लिए, Det (A^n) का मान ज्ञात कीजिए ।

If $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, then for any natural number n, find the value of Det (A^n).

2. निम्न अवकल समीकरण के लिए इसकी *कोटि* व *घात* का योगफल ज्ञात कीजिए :

$$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{d^2y}{dx^2}$$

Find the sum of the *order* and the *degree* of the following differential equation :

$$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{d^2y}{dx^2}$$

3. निम्न अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए :

$$x\sqrt{(1+y^2)}\,dx + y\sqrt{(1+x^2)}\,dy = 0$$

Find the solution of the following differential equation :

$$x\sqrt{(1+y^2)}\,dx + y\sqrt{(1+x^2)}\,dy = 0$$

4. त्रिभुज OAC में, यदि B, भुजा AC का मध्य-बिन्दु हो तथा $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ हो, तो $\overrightarrow{OC}$ क्या होगा ?

In a triangle OAC, if B is the mid-point of side AC and $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, then what is $\overrightarrow{OC}$?

5. सदिशों $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ दोनों के लम्बवत् एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए, जिसका परिमाण $\sqrt{171}$ हो ।

Find a vector of magnitude $\sqrt{171}$ which is perpendicular to both of the vectors $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$.

6. रेखाओं $2x = 3y = -z$ तथा $6x = -y = -4z$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।

Find the angle between the lines $2x = 3y = -z$ and $6x = -y = -4z$.

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 7 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

Question numbers 7 to 19 carry 4 marks each.

7. A और B दो परिवार हैं । परिवार A में, 4 पुरुष, 6 महिलाएँ तथा 2 बच्चे हैं, और परिवार B में, 2 पुरुष, 2 महिलाएँ तथा 4 बच्चे हैं । प्रति पुरुष, महिला व बच्चे को क्रमश: 2400, 1900 तथा 1800 कैलोरी की दैनिक मात्रा देने का सुझाव है, और क्रमश: 45, 55 तथा 33 ग्राम प्रोटीन देने का सुझाव दिया जाता है । उपर्युक्त सूचना व तथ्य को आव्यूह द्वारा निरूपित कीजिए । आव्यूह गुणनफल का प्रयोग करके, प्रत्येक परिवार के लिए कैलोरी तथा प्रोटीन की दी जाने वाली कुल मात्रा ज्ञात कीजिए । इस प्रश्न से आप लोगों के बीच सन्तुलित आहार के लिए किस प्रकार की जागरूकता उत्पन्न कर सकते हैं ?

There are 2 families A and B. There are 4 men, 6 women and 2 children in family A, and 2 men, 2 women and 4 children in family B. The recommended daily amount of calories is 2400 for men, 1900 for women, 1800 for children and 45 grams of proteins for men, 55 grams for women and 33 grams for children. Represent the above information using matrices. Using matrix multiplication, calculate the total requirement of calories and proteins for each of the 2 families. What awareness can you create among people about the balanced diet from this question ?

8. मान ज्ञात कीजिए :

$$\tan\left\{2\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{\pi}{4}\right\}$$

Evaluate :

$$\tan\left\{2\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{\pi}{4}\right\}$$

9. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a^3 & 2 & a \\ b^3 & 2 & b \\ c^3 & 2 & c \end{vmatrix} = 2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Using properties of determinants, prove that

$$\begin{vmatrix} a^3 & 2 & a \\ b^3 & 2 & b \\ c^3 & 2 & c \end{vmatrix} = 2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

10. प्रारम्भिक पंक्ति संक्रियाओं (रूपान्तरणों) के प्रयोग से निम्न आव्यूह का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, तो AC, BC तथा (A + B) C का परिकलन कीजिए । यह भी सत्यापित कीजिए कि (A + B) C = AC + BC.

Using elementary row operations (transformations), find the inverse of the following matrix :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

OR

If $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, then calculate AC, BC and (A + B) C. Also verify that (A + B) C = AC + BC.

11. फलन $f(x) = |x| + |x - 1|$ की अंतराल $(-1, 2)$ में सांतत्यता तथा अवकलनीयता की विवेचना कीजिए ।

Discuss the continuity and differentiability of the function $f(x) = |x| + |x - 1|$ in the interval $(-1, 2)$.

12. यदि $x = a(\cos 2t + 2t \sin 2t)$ तथा $y = a(\sin 2t - 2t \cos 2t)$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए ।

If $x = a(\cos 2t + 2t \sin 2t)$ and $y = a(\sin 2t - 2t \cos 2t)$, then find $\frac{d^2y}{dx^2}$.

13. यदि $(ax + b) e^{y/x} = x$ है, तो दिखाइए कि

$$x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2$$

If $(ax + b) e^{y/x} = x$, then show that

$$x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2$$

14. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sin x - x \cos x}{x(x + \sin x)} \, dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x^2+1)} \, dx$$

Evaluate :

$$\int \frac{\sin x - x \cos x}{x(x + \sin x)} \, dx$$

OR

Evaluate :

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x^2+1)} \, dx$$

15. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x \, dx}{1 + 3\sin^2 x}$$

Evaluate :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x \, dx}{1 + 3\sin^2 x}$$

16. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} \right) dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} \right) dx$$

17. मान लीजिए कि $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ और $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$. एक ऐसा सदिश $\vec{d}$ ज्ञात कीजिए जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों पर लम्ब हो और $\vec{c} \cdot \vec{d} = 27$.

Let $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ and $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$. Find a vector $\vec{d}$ which is perpendicular to both $\vec{a}$ and $\vec{b}$ and $\vec{c} \cdot \vec{d} = 27$.

18. निम्न रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu (4\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k})$$

अथवा

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $2x + y - z = 3$ तथा $5x - 3y + 4z + 9 = 0$ की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाता है तथा रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{5-z}{-5}$ के समान्तर है ।

Find the shortest distance between the following lines :

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu(4\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k})$$

OR

Find the equation of the plane passing through the line of intersection of the planes $2x + y - z = 3$ and $5x - 3y + 4z + 9 = 0$ and is parallel to the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{5-z}{-5}$.

19. एक व्यक्ति के एक कदम आगे चलने की प्रायिकता 0·4 तथा एक कदम पीछे हटने की प्रायिकता 0·6 है । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि 5 कदम चलने के पश्चात्, यह व्यक्ति प्रारम्भिक बिन्दु से एक कदम दूर है ।

अथवा

मान लीजिए कि कोई लड़की एक पासा उछालती है । यदि उसे 1 या 2 की संख्या प्राप्त होती है, तो वह एक सिक्के को तीन बार उछालती है और 'पट' की संख्या नोट करती है । यदि उसे 3, 4, 5 या 6 की संख्या प्राप्त होती है, तो वह एक सिक्के को एक बार उछालती है और यह नोट करती है कि उस पर 'चित' या 'पट' प्राप्त हुआ । यदि उसे ठीक एक 'पट' प्राप्त होता है, तो उसके द्वारा उछाले गए पासे पर 3, 4, 5 या 6 प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है ?

A man takes a step forward with probability 0·4 and backward with probability 0·6. Find the probability that at the end of 5 steps, he is one step away from the starting point.

OR

Suppose a girl throws a die. If she gets a 1 or 2, she tosses a coin three times and notes the number of 'tails'. If she gets 3, 4, 5 or 6, she tosses a coin once and notes whether a 'head' or 'tail' is obtained. If she obtained exactly one 'tail', what is the probability that she threw 3, 4, 5 or 6 with the die ?

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 20 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 20 to 26 carry 6 marks each.

20. निर्धारित कीजिए कि क्या सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{R}$ में $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}$ तथा $a - b + \sqrt{3} \in S$, जहाँ S सभी अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय है$\}$, द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है ।

अथवा

माना कि $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ है तथा A में $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है । सिद्ध कीजिए कि $*$ क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है । A में $*$ का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए तथा अवयव $(3, -5)$ का A में प्रतिलोम अवयव भी लिखिए ।

Determine whether the relation R defined on the set $\mathbb{R}$ of all real numbers as $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}$ and $a - b + \sqrt{3} \in S$, where S is the set of all irrational numbers$\}$, is reflexive, symmetric and transitive.

OR

Let $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ and $*$ be the binary operation on A defined by $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$. Prove that $*$ is commutative and associative. Find the identity element for $*$ on A. Also write the inverse element of the element $(3, -5)$ in A.

21. वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ के पहले चतुर्थांश के भाग के किसी बिन्दु पर बनी स्पर्श रेखा x-अक्ष को बिन्दु A व y-अक्ष को बिन्दु B पर काटती है । यदि O, वृत्त का केन्द्र हो, तो (OA + OB) का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए ।

Tangent to the circle $x^2 + y^2 = 4$ at any point on it in the first quadrant makes intercepts OA and OB on x and y axes respectively, O being the centre of the circle. Find the minimum value of (OA + OB).

22. यदि परवलय $y^2 = 16ax$ तथा रेखा $y = 4mx$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $\frac{a^2}{12}$ वर्ग इकाई है, तो समाकलन के प्रयोग से m का मान ज्ञात कीजिए ।

If the area bounded by the parabola $y^2 = 16ax$ and the line $y = 4mx$ is $\frac{a^2}{12}$ sq. units, then using integration, find the value of m.

23. दिखाइए कि अवकल समीकरण $(x - y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ समघातीय है तथा इसे हल भी कीजिए ।

अथवा

वक्रों के कुल $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ h तथा k स्वेच्छ अचर हैं ।

Show that the differential equation $(x - y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ is homogeneous and solve it also.

OR

Find the differential equation of the family of curves $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, where h and k are arbitrary constants.

24. बिन्दु P(6, 5, 9) से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि बिन्दुओं A(3, –1, 2), B(5, 2, 4) तथा C(–1, –1, 6) से निर्धारित तल के समांतर है । अत: इस समतल की बिन्दु A से दूरी भी ज्ञात कीजिए ।

Find the equation of a plane passing through the point P(6, 5, 9) and parallel to the plane determined by the points A(3, –1, 2), B(5, 2, 4) and C(–1, –1, 6). Also find the distance of this plane from the point A.

25. एक कलश में 5 लाल व 2 काली गेंदें हैं । दो गेंदें बिना प्रतिस्थापना के यादृच्छया निकाली गईं । मान लीजिए कि X निकाली गई काली गेंदों की संख्या को व्यक्त करता है । X के सम्भावित मान क्या हैं ? क्या X एक यादृच्छिक चर है ? यदि हाँ, तो X का माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए ।

An urn contains 5 red and 2 black balls. Two balls are randomly drawn, without replacement. Let X represent the number of black balls drawn. What are the possible values of X ? Is X a random variable ? If yes, find the mean and variance of X.

26. आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए ।

निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत

$$x + 2y \geq 10$$

$$x + y \geq 6$$

$$3x + y \geq 8$$

$$x, y \geq 0$$

$z = 3x + 5y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए ।

Solve the following linear programming problem graphically.

Minimise $z = 3x + 5y$

subject to the constraints

$$x + 2y \geq 10$$

$$x + y \geq 6$$

$$3x + y \geq 8$$

$$x, y \geq 0.$$

QUESTION PAPER CODE 65/1/A

EXPECTED ANSWERS/VALUE POINTS

SECTION - A

		Marks
1.	getting $\lvert A \rvert = 1$	½ m
	$\lvert A^n \rvert = 1$	½ m
2.	Order 2 or degree = 1	½ m
	sum = 3	½ m
3.	Writing $\int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = -\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$	½ m
	Getting $\sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2} = c$	½ m
4.	$\overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2}$	½ m
	$\overrightarrow{OC} = 2\vec{b} - \vec{a}$	½ m
5.	Vector Perpendicular to $\vec{a}$ and $\vec{b}$ $= \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\lvert \vec{a}\times\vec{b} \rvert}$	
	[Finding or using]	½ m
	Required Vector $= \hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$	½ m
6.	Writing standard form	
	$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-6}$ and $\frac{x}{2} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-3}$	½ m
	Finding $\theta = \frac{\pi}{2}$	½ m

SECTION - B

7. $\begin{array}{l} \text{Family A} \Rightarrow \\ \text{Family B} \Rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{cc} C & P \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 2400 & 45 \\ 1900 & 55 \\ 1800 & 33 \end{bmatrix}} \end{array}$ 2 m

Writing Matrix Multiplication as $\begin{bmatrix} 24600 & 576 \\ 15800 & 332 \end{bmatrix}$ 1 m

Writing about awareness of balanced diet 1 m

Alt : Method

Taking the given data for all Men, all Women, all Children for each family, the solution must be given marks accordingly

8. $\tan\left\{\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{\pi}{4}\right\} = \tan\left\{\tan^{-1}\left(\frac{2/5}{1-\frac{1}{25}}\right)+\frac{\pi}{4}\right\}$ 1 m

$= \tan\left\{\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)+\frac{\pi}{4}\right\}$ 1 m

$= \dfrac{\frac{5}{12}+1}{1-\frac{5}{12}} = \dfrac{17}{7}$ 1+1 m

9. Writing $C_1 \leftrightarrow C_2$

$$A = -2\begin{vmatrix} 1 & a^3 & a \\ 1 & b^3 & b \\ 1 & c^3 & c \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - R_2$ & $R_2 \to R_2 - R_3$

$$A = -2\begin{vmatrix} 0 & a^3-b^3 & a-b \\ 0 & b^3-c^3 & b-c \\ 1 & c^3 & c \end{vmatrix}$$ 1+1 m

$$A = -2(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & a^2+ab+b^2 & 1 \\ 0 & b^2+c^2+bc & 1 \\ 1 & c^3 & c \end{vmatrix}$$ 1 m

$$= -2(a-b)\ (b-c)\ \left\{a^2+ab+b^2-b^2-bc-c^2\right\}$$ ½ m

$$= \ 2\ (a-b)\ (b-c)\ (c-a)\ (a+b+c)$$ ½ m

10. $A = IA$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$ 1 m

Using elementary row trans formations to get

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -9 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$$ 2 m

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -9 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$ 1 m

OR

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$$ 1 m

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$ 1 m

$$AC + BC = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$ ½ m

$$(A+B)\ C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$ ½ m

$$= \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$ 1 m

Yes, $(A+B)\ C = AC + BC$

11. $$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{if} \quad x < 0 \\ 1 & \text{if} \quad 0 \le x < 1 \\ 2x-1 & \text{if} \quad x \ge 1 \end{cases}$$ 1½ m

Only possible discontinuties are at $x = 0,\ x = 1$

at $x = 0$	:	at $x = 1$
L. H. limit $= 1$	:	L. H. limit $= 1$
$f(0) =$ R. H. limit $= 1$	:	$f(1) =$ R. H. limit $= 1$

1 m

$\therefore$ f(x) is continuous in the interval (– 1, 2) ½ m

At $x = 0$

L. H. D $= -2 \neq$ R. H. D $= 1$ 1 m

$\therefore$ f(x) is not differentiable in the interval (– 1, 2)

12. $x = a\ (\cos 2t + 2t \sin 2t)$

$y = a\ (\sin 2t - 2t \cos 2t)$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 4\,at \cos 2t$$ 1 m

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 4\,at \sin 2t$$ 1 m

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan 2t$$ ½ m

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2\sec^2 2t \cdot \frac{dt}{dx}$$ 1 m

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2\,at \cos^3 2t}$$ ½ m

13. $\frac{y}{x} = \log x - \log\,(ax+b)$

differentiating w.r.t. x, 1 m

$$= \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{a}{ax+b} = \frac{b}{x\,(ax+b)}$$

$$= x \cdot \frac{dy}{dx} - y = \frac{bx}{(ax+b)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$ 1 m

differentiating w.r.t. x again

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{(ax+b)\,b - abx}{(ax+b)^2}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b^2}{(ax+b)^2}$$ 1 m

Writing $\Rightarrow x^3 \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{bx}{ax+b}\right)^2$ .... (2) ½ m

From (1) and (2) $\Rightarrow$

$$x^3 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(x \cdot \frac{dy}{dx} - y\right)^2$$ ½ m

14. $I = \displaystyle\int \frac{x + \sin x - x(1 + \cos x)}{x(x + \sin x)}\, dx$ 1 m

$= \displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x}\, dx$ put $x + \sin x = t$ 2 m

$\Rightarrow (1 + \cos x)\, dx = dt$

$= \log|x| - \log|x + \sin x| + c$ 1 m

OR

$I = \displaystyle\int \frac{(x-1)(x^2+x+1)+1}{(x-1)(x^2+1)}\, dx$ ½ m

$= \displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\, dx + \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$ 1 m

$= \displaystyle\int \left(1 + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\right) dx$ 1½ m

$= x + \dfrac{1}{4}\log|x^2+1| + \dfrac{1}{2}\log|x-1| - \dfrac{1}{2}\tan^{-1}x + c$ 1 m

15. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+4\tan^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{(1+\tan^2 x)(1+4\tan^2 x)} dx$ 1 m

Put $\tan x = t$

$I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+4t^2)} = -\frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} + \frac{4}{3}\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+(2t)^2}$ 1 m

$= -\frac{1}{3}\tan^{-1} t\Big]_0^{\infty} + \frac{4}{3\times 2}\tan^{-1}(2t)\Big]_0^{\infty}$ 1 m

$= -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ 1 m

16. $I = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^2 - 2^2} dx$ 1½ m

Put $\sin x - \cos x = t \Rightarrow t = -1$ to 0 1 m

$(\cos x + \sin x)\, dx = dt$

$I = -\int_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2 - 2^2}$

$= -\frac{1}{4}\log\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Big]_{-1}^{0}$ 1 m

$$\left.\begin{aligned} &= -\frac{1}{4}\{0 - \log 3\} \\ &= \frac{1}{4}\log 3 \end{aligned}\right\} \quad \text{½ m}$$

17. Writing $\vec{d} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$ 1 m

$$= \lambda\left(32\,\hat{i} - \hat{j} - 14\,\hat{k}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$ 1 m

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 27$$

$$\left(2\,\hat{i} - \hat{j} + 4\,\hat{k}\right) \cdot \lambda\left(32\,\hat{i} - \hat{j} - 14\,\hat{k}\right) = 27$$

$$9\lambda = 27$$ 1 m

$$\lambda = 3$$

$$\therefore \quad \vec{d} = 96\,\hat{i} - 3\,\hat{j} - 42\,\hat{k}$$ 1 m

18. Lines are parallel ½ m

$$\therefore \quad S.D = \left|\frac{\left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right) \times \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\right|$$ 1 m

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} + 2\,\hat{j} + 2\,\hat{k} \text{ and } \rightarrow b = 2\,\hat{i} + 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$$

$$\left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right) \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{29}$$ 1½ + ½ m

$\therefore$ S.D $= \left| \dfrac{2\hat{i} - \hat{k}}{\sqrt{29}} \right| = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{29}}$ or $\dfrac{\sqrt{145}}{29}$ ½ m

OR

Required equation of plane is

$2x + y - z - 3 + \lambda(5x - 3y + 4z + 9) = 0 \quad \rightarrow \quad (1)$ 1 m

$x(2 + 5\lambda) + y(1 - 3\lambda) + z(-1 + 4\lambda) + 9\lambda - 3 = 0$ 1 m

(1) is parallel to $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-5}{5}$

$\therefore \quad 2(2 + 5\lambda) + 4(1 - 3\lambda) + 5(-1 + 4\lambda) = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = -\dfrac{1}{6}$ 1 m

(1) $\Rightarrow \quad 7x + 9y - 10z - 27 = 0$ 1 m

19. P (step forward) $= \dfrac{2}{5}$, P (step backword) $= \dfrac{3}{5}$ ½ m

He can remain a step away in either of the

ways : 3 steps forward & 2 backwards 1 m

or 2 steps forward & 3 backwards

$\therefore$ required possibility $= {}^5C_3 \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + {}^5C_2 \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 \left(\dfrac{3}{5}\right)^3$ 2 m

$= \dfrac{72}{125}$ ½ m

OR

A die is thrown

Let E_1 be the event of getting 1 or 2

Let E_2 be the event of getting 3, 4, 5 or 6

Let A be the event of getting a tail

$$P(E_1) = \frac{1}{3}, P(E_2) = \frac{2}{3}$$ 1 m

$$\Rightarrow P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{3}{8}, \ \& \ P\left(\frac{A}{E_2}\right) = \frac{1}{2}$$ 1 m

$$P\left(\frac{E_2}{A}\right) = \frac{P(E_2)\times P\left(\frac{A}{E_2}\right)}{P(E_1)\times P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)\times P\left(\frac{A}{E_2}\right)}$$ 1 m

$$= \frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{8}{11}$$ 1 m

SECTION - C

20. Here $R = \{(a, b) : a, b \in \Re$ and $a - b + \sqrt{3} \in S$, where

S is the set of all irrational numbers.$\}$

(i) $\forall\, a \in \Re, (a, a) \in R$ as $a - a + \sqrt{3}$ is irrational

$\therefore$ R is reflexive 1½ m

(ii) Let for $a, b \in \Re, (a, b) \in R$ i. e. $a - b + \sqrt{3}$ is irrational

$a - b + \sqrt{3}$ is irrational $\Rightarrow b - a + \sqrt{3} \in S \ \therefore (b, a) \in R$

Hence R is symmetric 2 m

(iii) Let $(a, b) \in R$ and $(b, c) \in R$, for $a, b, c \in \Re$

$\therefore \quad a - b + \sqrt{3} \in S$ and $b - c + \sqrt{3} \in S$

adding to get $a - c + 2\sqrt{3} \in S$ Hence $(a, c) \in R$ 2½ m

$\therefore$ R is Transitive

OR

$\forall\ a, b, c, d, e, f \in \Re$

$$((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a + c, b + d) * (e, f)$$ 1 m

$$= (a + c + e, b + d + f) \rightarrow (3)$$

$$(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (c + e, d + f)$$ 1 m

$$= (a + c + e, b + d + f) \rightarrow (4)$$

$\therefore$ * is Associative

Let (x, y) be on identity element in $\Re \times \Re$

$\Rightarrow \quad (a, b) * (x, y) = (a, b) = (x, y) * (a, b)$

$\Rightarrow \quad a + x = a,\ b + y = b$

$x = 0,\ y = 0$ 2 m

$\therefore$ (0, 0) is identity element

Let the inverse element of $(3, -5)$ be $(x_1, y_1,)$

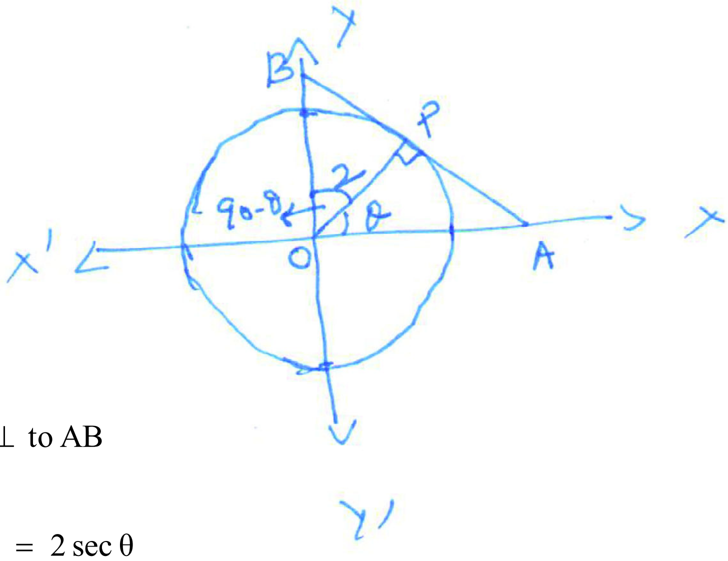
$\Rightarrow \quad (3, -5) * (x_1, y_1) = (0, 0) = (x_1, y_1) * (3, -5)$

$3 + x_1 = 0, \quad -5 + y_1 = 0$

$x_1 = -3, \quad y_1 = 5$

$\Rightarrow$ $(-3, 5)$ is an inverse of $(3, -5)$ 2 m

21. Fig. ½ m



$x^2 + y^2 = 4$. OP is $\perp$ to AB

$\cos\theta = \dfrac{2}{OA}$; $OA = 2\sec\theta$ ½ m

$\cos(90^\circ - \theta) = \dfrac{2}{OB}$

$OB = 2\,\text{cosec}\,\theta$ ½ m

Let $S = OA + OB = 2(\sec\theta + \text{cosec}\,\theta)$ .... (1) 1 m

$\dfrac{dS}{d\theta} = 2(\sec\theta\tan\theta - \text{cosec}\,\theta \cdot \cot\theta)$ 1m

$= 2\left(\dfrac{\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta}\right)$ .... (2)

for maxima or minima $\dfrac{dS}{d\theta} = 0$

$\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$, 1 m

(2) $\Rightarrow \dfrac{d^2S}{d\theta^2} > 0$ when $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 1 m

$\therefore$ OA + OB is minimum

$\Rightarrow OA + OB = 4\sqrt{2}$ unit ½ m

22.

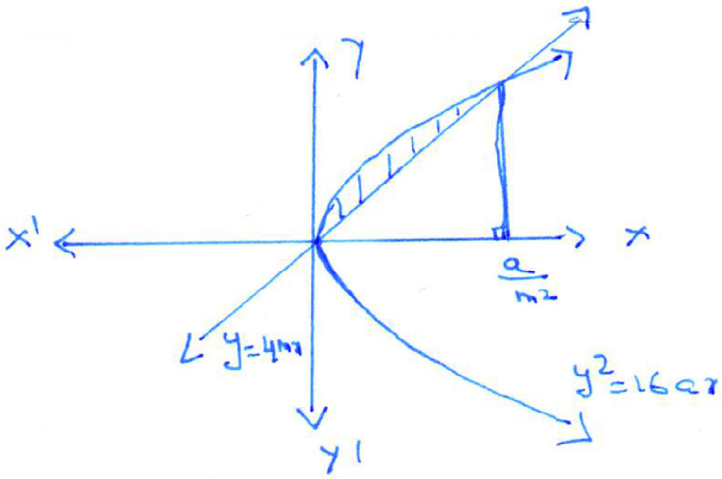


Figure .... ½ m

$y = 4mx \rightarrow (1)$ and $y^2 = 16\,ax \rightarrow (2)$ 1 m

$\Rightarrow x = \dfrac{a}{m^2}$

Required area $= 4\sqrt{a}\displaystyle\int_0^{\frac{a}{m^2}} \sqrt{x}\,dx - 4m\int_0^{\frac{a}{m^2}} x\,dx$ 2 m

$= \dfrac{8}{3}\sqrt{a}\; x^{3/2}\Big]_0^{\frac{a}{m^2}} - 2m\; x^2\Big]_0^{\frac{a}{m^2}}$

$= \dfrac{8}{3}\,\dfrac{a^2}{m^3} - \dfrac{2a^2}{m^3} = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{a^2}{m^3}$ 2 m

$\Rightarrow \dfrac{2}{3}\cdot a^2/m^3 = \dfrac{a^2}{12}$ given

$m^3 = 8$

$m = 2$ ½ m

23. $(x-y)\dfrac{dy}{dx} = x+2y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+2\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} = f\left({}^{y}\!/_{x}\right) \text{ .... (1)}$$

$\therefore$ differential equation is homogeneous Eqn. 1 m

$y = vx$ to give

$$v + x\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v}$$ ½ m

$$\Rightarrow \int \frac{1-v}{1+v+v^2}\,dv = \int \frac{dx}{x}$$ 1 m

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{2v+1}{1+v+v^2}\,dv + \frac{3}{2}\int \frac{dv}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \int\frac{dx}{x}$$ 1½ m

$$-\frac{1}{2}\log\left|1+v+v^2\right| + \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) = \log|x| + c$$ 1 m

$$-\frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}\right| + \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{x\sqrt{3}}\right) = \log|x| + c$$ 1 m

OR

$$(x-h)+(y-k)\frac{dy}{dx} = 0$$ 1 m

and $1+(y-k)\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ 1 m

$$\Rightarrow \; (y-k) = \frac{-\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$ 1 m

$$(1) \quad \Rightarrow \; (x-h) = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \; \frac{dy}{dx}$$ 1 m

Putting in the given eqn.

$$\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = r^2$$ 1 m

$$\text{or} \quad \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = r^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$ 1 m

24. Eqn. of a plane through

and Points A (6, 5, 9), B (5, 2, 4) & C (– 1, – 1, 6) is

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-6 & y-5 & z-9 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ 2½ m

$\Rightarrow$ $3x - 4y + 3z - 25 = 0 \quad \rightarrow \quad (2)$ 1½ m

distance from $(3, -1, 2)$ to (2)

$$d = \left| \frac{9+4+6-25}{\sqrt{9+16+9}} \right| = \frac{6}{\sqrt{34}} \text{ units}$$ 2 m

25. Possible values of x are 0, 1, 2 and x is a random variable 1½ m

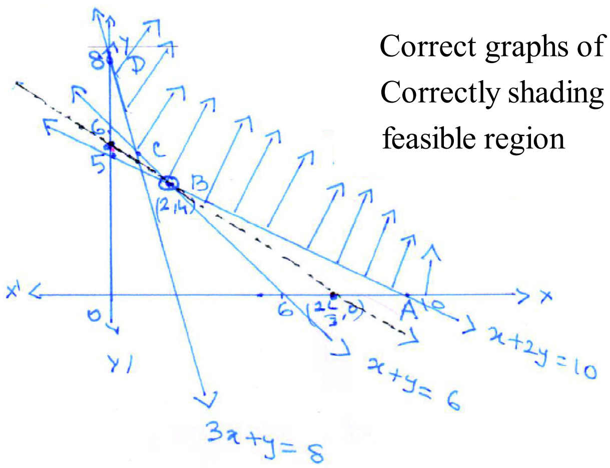
x :	P(x)	x P(x)	x^2 P(x)		
0	$\frac{{}^2C_0 \times {}^5C_2}{{}^7C_2} = \frac{20}{42}$	0	0	For P (x)	1½ m
1	$\frac{{}^2C_1 \times {}^5C_1}{{}^7C_2} = \frac{20}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{20}{42}$	For x P (x)	½ m
2	$\frac{{}^2C_2 \times {}^5C_0}{{}^7C_2} = \frac{2}{42}$	$\frac{4}{42}$	$\frac{8}{42}$	For x^2 P (x)	½ m

$$\sum x\ P(x) = \frac{24}{42};\ \sum x^2\ P(x) = \frac{28}{42}$$ 1 m

$\text{Mean} = \sum x\ P(x) = \frac{4}{7};\ \text{var}\,iance = \sum x^2\ P(x) - \left[\sum x\ P(x)\right]^2$ 1 m

$\text{Variance} = \frac{50}{147}$ $\qquad = \frac{2}{3} - \frac{16}{49} = \frac{50}{147}$

26.



Correct graphs of 3 lines 3 m

Correctly shading feasible region ½

Vertices are A (10, 0), B (2, 4), C (1, 5) & D (0, 8) 1 m

$Z = 3x + 5y$ is minimum

at B (2, 4) and the minimum Value is 26. 1 m

on Plotting $(3x + 5y < 26)$

since these it no common point with the feasible

region, Hence, $x = 2,\ y = 4$ gives minimum Z ½ m